**ЗДРАВСТВУЙТЕ! РАЗОБРАТЬ ТЕМУ: ВЫПИСАТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРАВИЛА, ПРИМЕРЫ И ГРАФИКИ.**

**ТЕМА: ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС, СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ КООРДИНАТ.**

**Сжатие (растяжение) графика к (от) оси ординат.  
Симметричное отображение графика относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025.gif**

Первая группа действий связана с умножением АРГУМЕНТА функции на число. Для удобства я разобью правило на несколько пунктов:

**Сжатие графика функции к оси ординат**

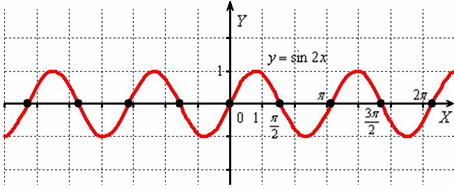
Это случай когда АРГУМЕНТ функции умножен на число, бОльшее единицы.

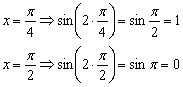
**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image029.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0000.gif **сжать к оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0000.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image031.gif раз.

Пример 1

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0000.gif.

Сначала изобразим график синуса, его период равен http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034.gif:  
  
К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image038.gif и т.д.

Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её **к оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0001.gif в 2 раза:  
  
То есть, график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0001.gif получается путём сжатия графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042.gif к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image044.gif

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:  
  
Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

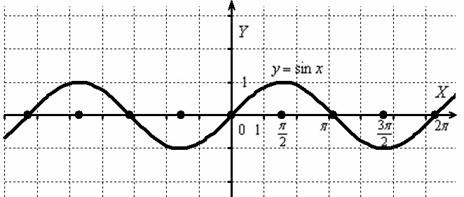
**Растяжение графика функции от оси ординат**

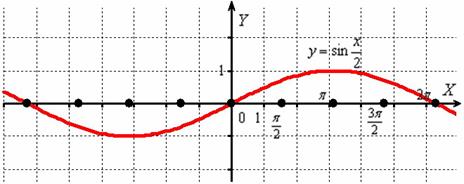
Это противоположное действие.  
Случай имеет место, когда АРГУМЕНТ функции умножается на число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image058.gif.

**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image058_0000.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0001.gif **растянуть от оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0003.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image062.gif раз.

Пример 3

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image064.gif



Растягиваем график **от оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0004.gif в 2 раза:  


То есть, график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image064_0000.gif получается путём **растяжения** графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0000.gif **от оси ординат** в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image069.gif, он толком даже не вместился на данный чертёж.

**Симметричное отображение графика функции относительно оси ординат**

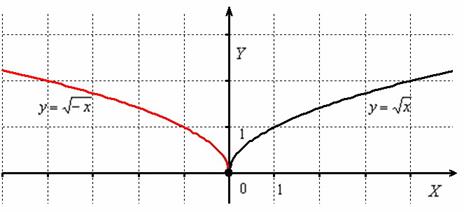
АРГУМЕНТ функции меняет знак.

**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image089.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0002.gif отобразить симметрично относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0007.gif.

Пример 5

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image094.gif

График функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image094_0000.gif получается путём симметричного отображения графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image097.gif относительно оси ординат:

  
Как видите, всё просто.

Если при умножении аргумента на число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0002.gif значение параметра http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image031_0000.gif отрицательно и не равно минус единице, то построение выполняется в два шага. Например: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image102.gif. На первом шаге выполняем сжатие графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0003.gif к оси ординат в 2 раза: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image105.gif. На втором шаге график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image105_0000.gif отображаем симметрично относительно оси ординат: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image102_0000.gif.

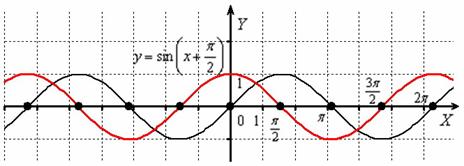
**Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс**

Если к АРГУМЕНТУ функции  добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109.gif. Рассмотрим функцию http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0004.gif и положительное число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112.gif:

**Правила**:  
1) чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image114.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0005.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0000.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112_0000.gif единиц **влево**;  
2) чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image117.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0006.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0001.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112_0001.gif единиц **вправо**.

Пример 8

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image139.gif

График синуса http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0001.gif (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0003.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142.gif **влево**:  
  
Внимательно присмотримся к полученному красному графику http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image146.gif…. Это в точности график косинуса http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050_0000.gif! По сути, мы получили геометрическую иллюстрацию [**формулы приведения**](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf) http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image149.gif, и перед вами, пожалуй, самая «знаменитая» формула, связывающая данные тригонометрические функции.  График  функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050_0001.gif получается путём сдвига синусоиды http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0002.gif вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0004.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142_0000.gif единиц влево.

**Растяжение (сжатие) графика ВДОЛЬ оси ординат.  
Симметричное отображение графика относительно оси абсцисс**

1) Если ФУНКЦИЯ http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0008.gif умножается на число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image204.gif, то происходит**растяжение её графика вдоль оси ординат**.

**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image204_0000.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0009.gif **растянуть вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0013.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image209.gif раз.

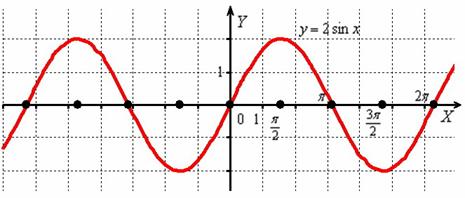
2) Если ФУНКЦИЯ умножается на число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image211.gif, то происходит **сжатие её графика вдоль оси ординат**.

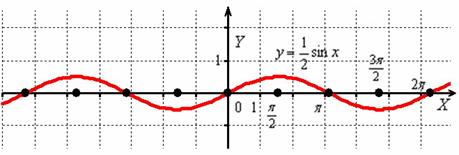
**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image211_0000.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0010.gif **сжать вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0014.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image215.gif  раз.

Догадайтесь, какую функцию я буду снова пытать =)

Пример 11

Построить графики функций http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image217.gif.

Берём синусоиду за макушку/пятки:  
  
И **вытягиваем** её **вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0015.gif  в 2 раза:  
  
Период функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image221.gif не изменился и составляет http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0001.gif, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image224.gif.

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0016.gif  в 2 раза:  
  
Аналогично, период http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0002.gif не изменился, но область значений функции «сплющилась» в два раза: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image228.gif.

**Сдвиг графика вверх/вниз вдоль оси ординат**

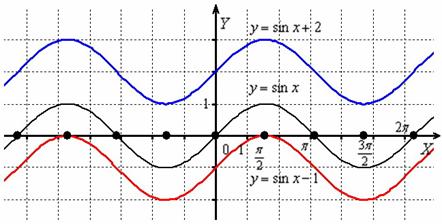
Настала пора дать передышку ногам и сесть в лифт.

Если к ФУНКЦИИ  добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) её графика вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0002.gif. Рассмотрим функцию http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0002.gif и положительное число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0001.gif:

**Правила**:  
1) чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image008_0000.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0003.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0003.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0002.gif единиц **вверх**;  
2) чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0003.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0004.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0004.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0003.gif единиц **вниз**.

Пример 15

Построить графики функций http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image015.gif.

В комментариях, думаю, нет особой необходимости:  


Комбинационное построение графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image019_0000.gif в общем случае осуществляется очевидным образом:

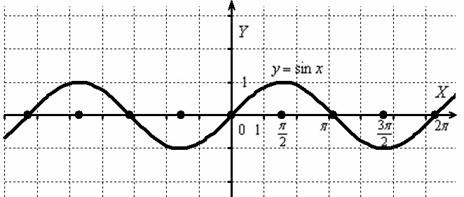
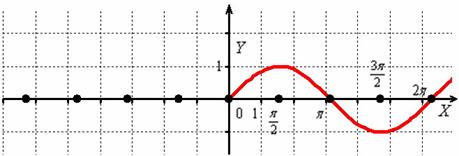
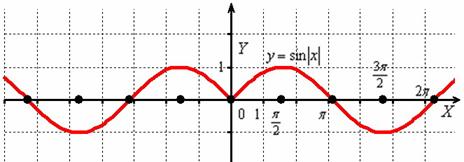
1) График функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0005.gif растягиваем (сжимаем) вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0005.gif. Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0012.gif.

2) Полученный на первом шаге график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0018.gif сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0004.gif.

**Графики функций с модулем**

**Правило**: график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image153.gif получается из графика функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0006.gif следующим образом: при http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image156.gif график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0007.gif **сохраняется**, а при http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image159_0000.gif «сохранённая часть» **отображается симметрично** относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0016.gif.

Пример 22

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image162.gif  
  
Согласно правилу, при http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image156_0000.gif график сохраняется:  
  
И сохранившаяся часть отображается симметрично относительно оси  http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0017.gif в левую полуплоскость:  


Действительно, функция http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image162_0000.gif – чётная, и её график симметричен относительно оси ординат. Поясню детальнее смысл симметрии. Посмотрим на два противоположных значения аргумента, например, на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image171_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image173.gif. А какая разница? Модуль всё равно уничтожит знак «минус»: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image175_0001.gif, то есть значения функции будут располагаться на одной высоте.

Пример 26

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image238_0000.gif.  


И снова – то, что находиться в верхней полуплоскости – оставим в покое, а содержимое нижней – отобразим симметрично относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0022.gif:  
