**Здравствуйте.**

**Тема: «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера».**

Для того чтобы освоить данный параграф Вы должны уметь раскрывать определители «два на два» и «три на три».

Сначала мы подробно рассмотрим правило Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим систему уравнений http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image002.gif

На первом шаге вычислим определитель  http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image004.gif, его называют *главным определителем системы*.

Если http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image006.gif, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать [**метод Гаусса**](http://www.mathprofi.ru/metod_gaussa_dlya_chainikov.html)(о нем чуть позже).

Если http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image008.gif, то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image010.gif и http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image012.gif

На практике вышеуказанные определители также могут обозначаться латинской буквой http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image014.gif.

Корни уравнения находим по формулам:  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image016.gif, http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image018.gif

Пример

Решить систему линейных уравнений  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image020.gif

**Решение**:

Как решить такую систему? Можно попытаться выразить одну переменную через другую, но в этом случае наверняка получатся страшные навороченные дроби, с которыми крайне неудобно работать, да и оформление решения будет выглядеть просто ужасно. Можно умножить второе уравнение на 6 и провести почленное вычитание, но и здесь возникнут те же самые дроби.

Что делать? В подобных случаях и приходят на помощь формулы Крамера.

http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image022.gif, значит, система имеет единственное решение.

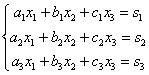
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image024.gif;  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image026.gif

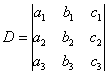
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image028.gif;  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image030.gif

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image032.gif, http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image034.gif

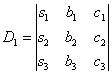
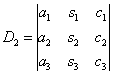
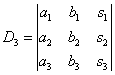
Оба корня обладают бесконечными хвостами, и найдены приближенно, что вполне приемлемо.

Комментарии здесь не нужны, поскольку задание решается по готовым формулам, однако, есть один нюанс. Когда используете данный метод, **обязательным**фрагментом оформления задания является следующий фрагмент: *«http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image036.gif, значит, система имеет единственное решение»*. В противном случае рецензент может Вас наказать за неуважение к теореме Крамера.

Переходим к рассмотрению правила Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:  


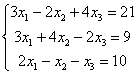
Находим главный определитель системы:  


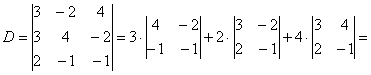
Если http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image044.gif, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений).

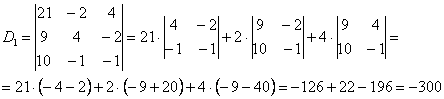
Если http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image046.gif, то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:  
, , 

И, наконец, ответ рассчитывается по формулам:  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_1.gif

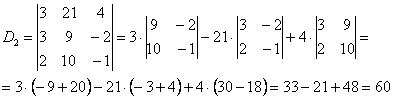
Как видите, случай «три на три» принципиально ничем не отличается от случая «два на два», столбец свободных членов http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image060.gif последовательно «прогуливается» слева направо по столбцам главного определителя.

Пример   
  
Решить систему по формулам Крамера.   


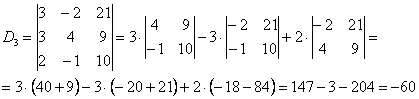
**Решение**: Решим систему по формулам Крамера.  
  
http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image066.gif, значит, система имеет единственное решение.



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image070.gif



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image074.gif



http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image078.gif

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/f/pravilo_kramera_matrichnyi_metod_clip_image080.gif.

**МЕТОД ГАУССА**.

Метод  Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения **любой** системы линейных уравнений. Как мы помним, **м. Крамера** непригоден в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Вернемся к простейшей системе   
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image002.gif и решим ее методом Гаусса.

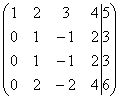
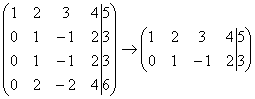
На первом этапе нужно записать расширенную матрицу системы:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image004.gif. По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно. Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

**Справка**: рекомендую запомнить ***термины*** линейной алгебры. ***Матрица системы*** – это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном примере матрица системы: *http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image006.gif*. ***Расширенная матрица системы*** – это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае: *http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image004_0000.gif*. Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются элементарными преобразованиями.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) **Строки** матрицы **можно** **переставлять** местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую строки: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image008.gif

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме одной. Рассмотрим, например матрицу . В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из них: .

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует **удалить**. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой одни нули.

4) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от нуля. Рассмотрим, например, матрицу http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image014.gif. Здесь целесообразно первую строку разделить на –3, а вторую строку – умножить на 2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image016.gif. Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу из практического примера: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image004_0001.gif. Сначала я распишу преобразование очень подробно. Умножаем первую строку на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image019.gif, и **ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на –2**: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image021.gif. Теперь первую строку можно разделить «обратно» на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image023.gif. Как видите, строка, которую ПРИБАВЛЯ**ЛИ** – не изменилась. **Всегда** меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯ**ЮТ**.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image025.gif  
Еще раз: ко второй строке **прибавили первую строку, умноженную на –2**. Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image027.gif»

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image029.gif, и ко второй строке прибавляю первую: 2 + (–2) = 0. Записываю результат во вторую строку:  http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image031.gif»

«Теперь второй столбец. Вверху –1 умножаю на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image033.gif. Ко второй строке прибавляю первую: 1 + 2 = 3. Записываю результат во вторую строку:  http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image035.gif»

«И третий столбец. Вверху –5 умножаю на –2: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image037.gif. Ко второй строке прибавляю первую: –7 + 10 = 3. Записываю результат во вторую строку:  http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image025_0000.gif»

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане». Но, конечно, над этим преобразованием мы еще поработаем.

**Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений**

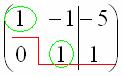
**! ВНИМАНИЕ**: рассмотренные манипуляции **нельзя использовать**, если Вам предложено задание, где матрицы даны «сами по себе». Например, при «классических» [**действиях с матрицами**](http://www.mathprofi.ru/deistviya_s_matricami.html) что-то переставлять внутри матриц ни в коем случае нельзя!  
  
Вернемся к нашей системе http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image002_0000.gif. Она практически разобрана по косточкам.

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image040.gif

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. И снова: почему первую строку умножаем именно на –2? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

**Цель элементарных преобразований** – привести матрицу к ступенчатому виду: . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется трапециевидный вид или треугольный вид.

 В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система уравнений:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image044.gif

Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса.

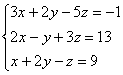
В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image046.gif.

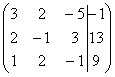
Рассмотрим первое уравнение системы http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image048.gif и подставим в него уже известное значение «игрек»:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image050.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image052.gif

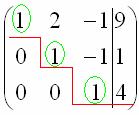
Ответ: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image054.gif

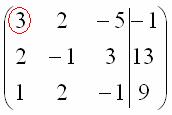
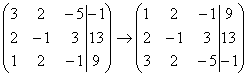
Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

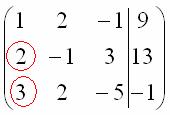
Решить методом Гаусса систему уравнений:  


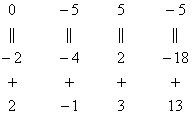
Запишем расширенную матрицу системы:  


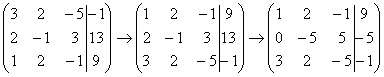
Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:  
  
И повторюсь, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:  
  
Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:  


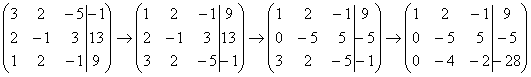
**Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения**. Уже легче.

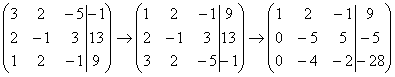
Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:  


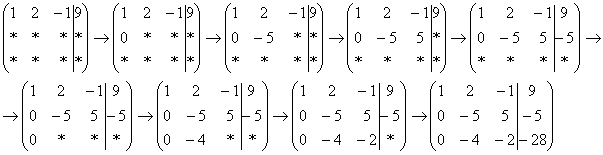
Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:  


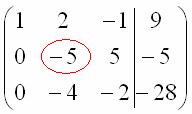
Результат записываем во вторую строку:  


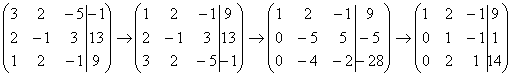
Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:

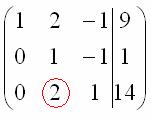
Результат записываем в третью строку:  


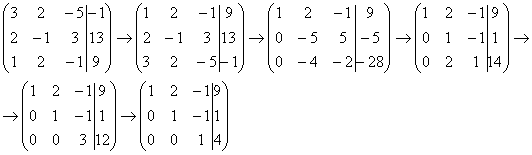
На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:  


**Не нужно считать всё сразу и одновременно**. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен** и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку – ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО и**ВНИМАТЕЛЬНО**:  


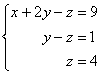
Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:  


В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:  


На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:  


Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:  
  
Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:  


Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image090.gif

Смотрим на второе уравнение: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image092.gif. Значение «зет» уже известно, таким образом:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image094.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image096.gif

И, наконец, первое уравнение: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image098.gif. «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image100.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image102.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image104.gif **Ответ**: http://www.mathprofi.ru/g/metod_gaussa_dlya_chainikov_clip_image106.gif